

# キラリティのない分散ロボットの平面形成問題

富田祐作 山内由紀子 来嶋秀治 山下雅史  
九州大学

## 1 はじめに

本研究では空中、水中、宇宙空間などの3次元空間中を自律的に移動するロボット群の分散制御を考える。2次元平面上でのロボット群の分散制御に関する研究は数多く存在しているため、3次元空間中のロボットを、2次元平面上に乗せることは有用であると考えられる。山内ら [1] は、3次元空間中の無記憶完全同期ロボット群に対し、全てのロボットの局所座標系が右手系に統一されている (キラリティがある) という仮定の下での平面形成問題の必要十分条件を示した。

本研究では、ロボットの持つ局所座標系に着目し、右手系と左手系が混在している (キラリティがない) 場合を考え、3次元空間中のキラリティのない無記憶完全同期ロボット群の平面形成問題の十分条件を示す。本稿では、山内ら [1] の平面合意条件を満たさないロボット群の配置であっても、ロボット群にキラリティが無ければ、平面を合意可能な場合が存在することを示す。

## 2 諸定義

### 2.1 ロボットのモデル

各ロボットは、3次元空間中の点であると仮定し、観測、計算、移動からなるサイクルを同期的に実行する完全同期モデルであると仮定する。さらに、各ロボットは無記憶であり、自分自身や他のロボットが一つ前のサイクルに行った動作を記憶することができない。また、各ロボットは移動途中で停止せず、各ロボットの移動経路は重なっても良いとする。またロボットは自身の局所座標系で観測を行うとし、本研究では局所座標系に関していずれの仮定も置かない。

### 2.2 平面形成問題

平面形成問題とは全てのロボットがひとつの平面を合意し、合意した平面へ着地する問題である。文献 [1] ではロボットは重複無く、異なる点に着地することを平面形成の条件としている。本研究では、重複を避けて着地不可能な場合が存在するという問題を解決するために、着地の際の2点重複を許す。

### 2.3 対称性の群

山内ら [1] はロボット群を点集合とみなし、回転操作がなす群である回転群を用いることでロボットの配置の対称性を分類している。本研究でもまた、ロボットの配置の対称性に着目するが、キラリティのない仮定において回転群により対称性を分類しようとする、右手系と左手系が鏡映対称性であることを原因とする問題が生じる。そこで、回転操作と鏡映操作が成す群である対称性の群を用いてロボットの配置に関する対称性を分類する。回転群と対称性の群は、シェーンフリース記号 [3] を用いて表記することができ、対称性の群は回転軸の種類と本数、鏡映面の存在の有無から全17種類に分類される。これは回転群を表す記号と添え字から表記され、巡回群  $C$ 、二面体群  $D$ 、回映群  $S$ 、正四面体群  $T$ 、正八面体群  $O$ 、正十二面体群  $I$ 、と添え字  $\{v, h\}$  を用いて表記される。添え字  $v$  は回転数が最大である軸 (主軸) に対して平行方向に鏡面があることを示し、 $h$  は主軸に対して垂直方向に鏡面があることを示し、添え字が無い場合は鏡面が無いことを示す。回映群  $S$  は回転群には含まれない群であり、これは回転操作と鏡映操作を同時に行う回映操作、を要素とする群である。また、対称性の群には部分群の関係が存在するものがあり、例えば  $T$  は  $O$  の部分群である。これを  $T \triangleleft O$  と表記することとする。本研究ではロボット全体の配置  $P$  の対称性の群を  $\iota(P)$  で表す。回転群と対称性の群の一覧については表1に示す。

## 2.4 $\iota(P)$ -分割

文献 [1] で定義される  $\gamma(P)$ -分割, と同様に定義される  $\iota(P)$ -分割を定義する. ロボットの配置  $P$  を  $\iota(P)$  の群の作用によって軌道に分割できるが, この軌道空間を  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  とし,  $P$  の  $\iota(P)$ -分割と呼ぶ. 各  $P_i$  の任意の 2 つの要素は  $\iota(P)$  の操作によって相互に入れ替えることができ, これを頂点推移性があると呼ぶ. 頂点推移性を持つ各  $P_i$  内のロボットは後述する  $\iota$  に対するローカルビューを用いることで同じ観測結果を持つ.  $\iota(P)$  は  $P$  を観測する局所座標系に依らないため, 各ロボットは  $\iota(P)$ -分割を計算でき,  $\iota$  に対するローカルビューを用いることで文献 [1] と同じく全ロボットで  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  を一意に順序づけることができる.

## 2.5 局所座標系に関する回転群 $\omega$

$P$  に属する全てのロボットの配置と局所座標系が, 回転群  $A$  の全ての元を作用させても一致するとき, そのうち最大の位数の群  $A$  を  $\omega(P) = A$  とする. すなわち,  $\omega$  は局所座標系に関する対称性を示す.

## 2.6 $\iota$ に対するローカルビュー

文献 [1] ではローカルビューと呼ばれる観測方法を定め, ローカルビューが同一な集合に回転群を用いて分割することで, 平面合意のアルゴリズムの道具としている. キラリティのある仮定下でのローカルビュー [1] は以下のように定められる.

まず経度, 緯度, 高度を考える. 初期配置  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  の配置  $p_i$  を全体座標系でのロボット  $r_i$  の位置とする.  $P$  は平面に含まれておらず, 最小包含球の中心  $b(P)$  について  $b(P) \notin P$  と仮定する. 最大の空の球  $L(P)$  は中心が  $b(P)$  であり, 内側に  $P$  の点を含まない球である. また  $L(P)$  は少なくとも  $P$  の 1 つの点を表面に含む.  $r_i$  は  $L(P)$  を地球として捉え, 直線  $p_i b(P)$  を地軸として捉える. 線分  $\overline{p_i b(P)}$  と  $L(P)$  の交点を北極  $NP_i$  とする. そのときロボット  $r_i$  は地軸上に無いロボットを子午線ロボット  $r_{m_i}$  を選ぶ.  $r_{m_i}$  の選び方は後述する. 線分  $\overline{p_{m_i} b(P)}$  と  $L(P)$  との交点を  $MP_i$  とする.  $L(P)$  上の  $NP_i$  から始まり,  $MP_i$  を含む大きな半円を本初子午線とする.  $r_i$  の局所観察をこの地球を中心とした経度, 緯度, 高度を用いて変換する. ロボット  $r_j \in P$  の位置を高度  $h_j$  (範囲  $[0, 1]$ ), 経度

$\theta_j$  (範囲  $[0, 2\pi)$ ), 緯度  $\phi_j$  (範囲  $[0, \pi]$ ) で表す.  $L(P)$  上の点を高度 0,  $B(P)$  上の点を高度 1 とする.  $MP_i$  の経度を 0 とする. また, 経度の正の方向は反時計回りとする.  $NP_i$  の緯度を 0, 赤道を  $\pi/2$ , 南極を  $\pi$  とする.  $p_j$  の位置を  $p_j^* = (h_j, \theta_j, \phi_j)$  と表記する. この位置の比較として辞書式順序と同様の方法で, 順序付けを行う. 二つの位置  $(h, \theta, \pi)$  と  $(h', \theta', \pi')$  があるとき, 以下の条件の時のみ  $(h, \theta, \pi) < (h', \theta', \pi')$  と順序付ける.

$$h < h', \text{ or}$$

$$h = h' \text{ and } \theta < \theta', \text{ or}$$

$$h = h', \theta = \theta' \text{ and } \pi < \pi'$$

$V_i^* = \langle p_i^*, p_{m_i}^*, p_{j_1}^*, p_{j_2}^*, \dots, p_{j_{n-2}}^* \rangle$  を  $p_j^*$  の位置を並べたリストとする. ( $p_{j_k}^* < p_{j_{k+1}}^*$ ). これを  $r_i$  のローカルビューとする. 子午線ロボットはローカルビュー  $V_i^*$  が最も小さい順序になるように選ばれる.

しかし, この座標系によらない観測方法であるローカルビューをキラリティのないロボット群に適応すると, ロボットが右手系であるときは経度の正方向は全体座標系 (右手系) から見て反時計回り, 左手系であるときは時計回り, となり経度の正方向が一意に定まらない. すなわち  $\iota(P)$ -分割された部分集合である  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  を一意に順序付けることができなくなる可能性がある. よって  $\iota(P)$ -分割した各部分集合のローカルビューが一致するように, 以下のような変更を加え  $\iota$  に対するローカルビューの定義を定める.

ローカルビュー [1] を定めようとしたとき, 経度の正の方向を反時計回りを正とするか, 時計回りを正とするかによってローカルビューが異なる場合は小さくなる方をローカルビューとする.

## 3 キラリティのないロボット群の平面合意問題の十分条件

文献 [1] では, ロボットの対称性が回転群で  $C_n$  または  $D_n$ , すなわち対称性の群で対称性が  $C_n, C_{nv}, C_{nh}, D_n, D_{nd}, D_{nh}$  であると平面合意可能であることが示されている. ここで山内ら [1] の平面合意条件に含まれない初期配置  $P$  であっても, キラリティがない場合, あるアルゴリズムによってロボットを移動させた後の配置  $P'$  の対称性の群  $\iota(P')$  を平面合意可能な対称性に変換可能な場合が存在することを次の補題 1 にて示す.

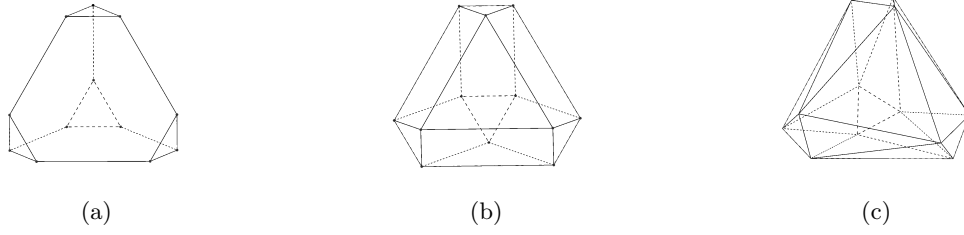


図 1: 12 台  $\iota(P) \in \{T, T_v, T_h\}$  対称性を持つ配置例

**補題 1.**  $P$  は頂点推移性を持ち,  $|P| = 12$  であるとする. また  $n_R$  を  $P$  に含まれる右手系の台数,  $n_L$  を左手系の台数とする.  $\iota(P) \in \{T, T_v, T_h\}$  であるとする, このとき ( $n_R > 0$ ) かつ ( $n_L > 0$ ) であるならば無記憶完全同期ロボット群は,  $\iota(P') \in \{C_n, C_{nv}, C_{nh}, D_n, D_{nv}, D_{nh}\}$  を満たす配置  $P'$  に  $P$  を変換できる.

補題 1 の条件にあてはまる具体的な配置は図 1 である. 補題 1 にて,  $\iota(P)$  の条件が  $\{T, T_v, T_h\}$  である理由を述べる. 先に述べたように補題 1 は山内ら [1] の示した平面合意不可能な初期配置  $P$  であっても, キラリティがない場合平面合意可能になる場合が存在することを示している. そのため補題 1 の条件はキラリティのある仮定において平面合意不可能である条件を示しているが, キラリティのある仮定 [1] において平面合意不可能な配置に属する対称性は, 部分群として  $T$  を含んでいるという性質があり, 回転群  $T$  は対称性の群における  $\{T, T_v, T_h\}$  の部分群であるため, 対称性が  $\{T, T_v, T_h\}$  であるとき平面合意不可能な場合が存在する. よって, キラリティのある仮定において平面合意不可能な配置を, 対称性の群で表した  $\{T, T_v, T_h\}$  が補題 1 の条件となっている. この平面合意不可能な対称性としてあげられる  $\{T, T_v, T_h\}$  を平面合意可能な配置に変換できる場合を補題 1 にて示している.

この補題 1 にて使用される  $P$  を変換するアルゴリズム  $\psi$  はある前提条件を持つ入力に対し, 各ロボットが実行するアルゴリズムであり,  $Z$  軸の負の方向を最小包含球の中心  $b(P)$  に向け, そのロボット  $r_i$  から最も近い 3 回回転軸から  $\epsilon$  手前の地点に移動する. その後最も近い 3 回回転軸を中心に, 反時計回りに  $1/6\pi$  回転する.

という動作を主に行うものであり, また  $\psi$  が仮定する前提条件は次の二つを両方満たすものである.

1. ロボットから最も近い 3 回回転軸が 1 本のみ存在.
2.  $\iota(P) \succeq T$

ただし, 実際はロボット群が持つ最小包含球の表面上 (図 2) に移動した方が, ロボットの重複を回避できるため, 実際の  $\psi$  は (Algorithm 3.1) とする.

また補題 1 と  $\iota(P)$ -分割を用いることで定理 1 が証明される. なお, 定理 1 は山内ら [1] の平面形成の条件が成立しない場合の平面形成可能性である.

---

#### Algorithm 3.1 $\psi$ at $r_i$

---

記法 :

$P$  : 全体座標系  $Z_i$  での配置.

$B(P)$  :  $P$  を包括する最小包含球.

$b(P)$  : 最小包含球  $B(P)$  の中心.

$rad(B(P))$  : 最小包含球  $B(P)$  の半径.

$\iota(P)$  : 対称性の群における  $P$  の対称性.

$r_i$  :  $P$  に属するロボットのうち自分自身を指す.

$n_{r_{ib}}$  :  $r_i$  からもっとも近い 3 回回転軸と,

$B(P)$  との 2 つの交点のうち

$r_i$  から距離の小さい方の交点.

$\widehat{r_i n_{r_{ib}}}$  :  $B(P)$  上を通る  $r_i$  と  $n_{r_{ib}}$  を結ぶ弧.

$\epsilon$  :  $\epsilon = rad(B(P))/2$

前提条件 :

$r_i$  から最も近い 3 回回転軸が 1 本に定まる.

$P$  は頂点推移性を持ち,  $\iota(P) \succeq T$

アルゴリズム :

$Z$  軸の負の方向を最小包含球の中心  $b(P)$  に向ける.

$\widehat{r_i n_{r_{ib}}}$  上で,  $n_{r_{ib}}$  からの弧上の距離が  $\epsilon$  手前である点に移動し (図 2), もっとも近い 3 回回転軸を中心に反時計回りに  $1/6\pi$  回転する.

(図 3 はロボットが移動する際に通る円周を表す.)

---

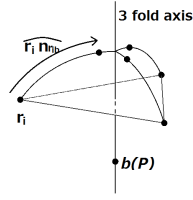


図 2:  $\psi$ (Algorithm3.1) による球面移動のイメージ

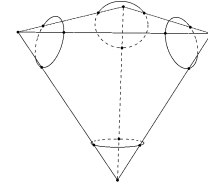


図 3:  $\psi$  による移動範囲

**定理 1.**  $P(0)$  を任意の初期配置,  $\iota(P(0))$  を  $P(0)$  の対称性の群とする.  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  を  $\iota(P(0))$ -分割とする.  $P_i$  に含まれる右手系の台数を  $n_{i_R}$ , 左手系の台数を  $n_{i_L}$  と表す.  $\forall i, (|P_i| \in \{12, 24, 48, 60, 120\})$  であるとする. このとき  $\exists i, ((n_{i_R} > 0) \wedge (n_{i_L} > 0) \wedge ((|P_i| = 12) \vee (\omega(P_i) \neq T)))$  が成り立つならば無記憶完全同期ロボット群は平面を合意可能である.

文献 [1] の平面形成の条件と定理 1 により, キラリティのないロボット群の 2 点重複を許す平面形成問題の十分条件を示すことができる.

**定理 2.**  $P(0)$  を任意の初期配置とし,  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  を  $\iota(P(0))$ -分割とする.  $P_i$  に含まれる右手系の台数を  $n_{i_R}$ , 左手系の台数を  $n_{i_L}$  と表す. キラリティのない無記憶完全同期ロボット群は以下の条件を少なくとも 1 つ満たすとき, 着地の際 2 台のロボットの重複までを許すと平面形成可能である.

1.  $\iota(P) \neq T$ ,
2.  $\{\iota(P) \succeq T\} \wedge \{\exists i, (|P_i| \notin \{12, 24, 48, 60, 120\})\}$ ,
3.  $\{\iota(P) \succeq T\} \wedge \{\forall i, (|P_i| \in \{12, 24, 48, 60, 120\})\} \wedge \{\exists j, ((n_{j_R} > 0) \wedge (n_{j_L} > 0) \wedge (\omega(P_j) \neq T))\}$ .

この定理を実現するアルゴリズムを具体的に与えることで, 定理 2 は証明可能である.

## 4 今後の課題

定理 2 はキラリティのないロボット群に対する平面形成問題の十分条件であるため, 今後必要条件についても検討する. さらに, 今回は平面への着地の際に 2 点重複を許しているが, 重複を回避するための手法条件を検討することも課題である.

## 参考文献

- [1] Y. Yamauchi, T. Uehara, S. Kijima, and M. Yamashita, Plane Formation by Synchronous Mobile Robots in the Three Dimensional Euclidean Space, The 29th International Symposium on Distributed Computing (DISC 2015) (to appear).
- [2] 下川航也, 平澤美可三, 松本三郎, 丸本嘉彦, 村上 斉 (訳): 多面体 新装版, 数学書房 (2014).
- [3] 今野豊彦: 物質の対称性と群論, 共立出版 (2014).
- [4] GeoGebra <<http://www.geogebra.org/download?ggbLang=ja>>

表 1: 対称性一覧 [1][2][3]

回転群	対称性の群	2 回回転軸	3 回回転軸	4 回回転軸	5 回回転軸	n 回回転軸	水平鏡映面	垂直鏡映面	位数
$C_1$	$C_1$	0	0	0	0	0	×	×	1
	$C_s$	0	0	0	0	0	×	○	2
	$C_i$	0	0	0	0	2 回回転軸	×	×	2
$C_n$	$C_n$	0	0	0	0	1	×	×	n
	$C_{nv}$	0	0	0	0	1	×	○	2n
	$C_{nh}$	0	0	0	0	1	○	○	2n
$D_n$	$D_n$	n	0	0	0	1	×	×	2n
	$D_{nv}$	n	0	0	0	1	×	○	4n
	$D_{nh}$	n	0	0	0	1	○	○	4n
$C_{n/2}$	$S_n$	0	0	0	0	n 回回転軸	×	×	n
$T$	$T$	3	4	0	0	0	×	×	12
	$T_d$	3	4	0	0	0	×	○	24
	$T_h$	3	4	0	0	0	○	○	24
$O$	$O$	6	4	3	0	0	×	×	24
	$O_h$	6	4	3	0	0	○	○	48
$I$	$I$	15	10	0	6	0	×	×	60
	$I_h$	15	10	0	6	0	○	○	120