一般化ジャンケンに対するゲーム理論的解析

九州大学経済学部経済工学科
小松秀平
shuhei@isop.co.jp

九州大学大学院経済学研究院経済工学部門
小野廣隆*
hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

概要

日本のジャンケンは，グー (石)，チョキ (鋏)，パー (紙) の 3 つの手によるものが一般的であるが，世界には 4 手以上からなるジャンケンが数多く存在する．しかしその中には明らかに他の手と比べ弱く，使うべきでない手（無駄な手）が含まれるものも多々ある．伊藤らは，無駄な手のない 4 手以上のジャンケン（一般化ジャンケン）について有向グラフとしての特徴づけを行った．本研究では，一般化ジャンケンを 2 人ゼロ和ゲームとして定式化し，最適混合戦略の観点から一般化ジャンケンについて考察を行う．伊藤らの定めた無駄な手のないジャンケンであっても， 戦略的には無駄な手が存在し得ること, 戦略的に無駄な手が存在しないジャンケンは必ず奇数手からなることを示す.

1 はじめに

日本のジャンケンは，グー (石)，チョキ (鋏)，パー (紙) の 3 つの手からなり，石は鋏に勝ち，鋏は紙に勝ち，紙は石に勝つ．両者が異なる手を出せば必ず勝負がつき，同じ手を出した場合は引き分けとなる．日本人ならば誰もが知る遊びの 1 つであろう．日本だけでなく，世界中にもジャンケンやその類型は存在する．その中には，日本の 3 手からなるジャンケンと違い，4 手以上からなるものも多々ある．wikipedia によると, フランスで

* corresponding author

は 4 手 (pierre (石), papier (紙), ciseaux (鋏), puit (井戸)) からなるジャンケン, 5 手からなるジャンケン (4 手のジャンケンに Bombe (爆弾) を加えたもの) などが存在する [4]. 伝統的なジャンケン以外にも新たなジャンケンの一般化が考えられており, 例えば David C. Lovelace 氏は, 7 手, 9 手, 11 手, 15 手, 25 手, さらに 101 手からなるジャンケンを提案している [5]. 以下では，4 手以上であっても，異なる 2 手の間に必ず勝ち負けが設定されているようなジャンケンの類型のことを単にジャンケンと呼ぶ.

世界のジャンケンを調べてみると，明らかに他の手と比べて弱く，使うべきでない手が含まれるものもある．例えば上述の 4 手からなるフランスのジャンケンでは，石と井戸は共に鋏に勝ち紙に負けるが, 井戸が石に勝つため石を出すならば井戸を出すほうが良い. 伊藤らは，このように他の手の下位互換となっている手を無駄な手と定義し，手数 5 以上ならば無駄な手のないジャンケン（一般化ジャンケン）を作ることができることを示した [2].

さてこれらジャンケンを実際に遊ぶとして，どのように出す手を選ぶべきかを考えよう. 通常の 3 手からなるジャンケンの場合, 石・紙・鋏を 1/3 ずつの等確率で出すのが妥当な「戦略」であるように思われる．では伊藤らの定義した一般化ジャンケンでは出す手をどのような確率で選ぶべきだろうか. 本論文では一般化ジャンケンを 2 人ゼロ和ゲームとして定式化することにより，この問いに答えることを試みる．興味深いことに, 伊藤らが定義した無駄な手のないジャンケンであっても，最適戦略においては確率 0 で選ぶべき手, すなわち, 出すべきでない手, 戦略的に無駄な手が存在することがあることがわかる．より具体的には, 伊藤らが任意の自然数 $n \neq 2, 4$ に対して, n 手の無駄な手のないジャンケンが存在することを示したのに対し, 本論文では「戦略的に無駄」な手が存在しないジャンケンは必ず奇数手からなることを数理計画的な観点から証明する.

本論文の構成は以下の通りである．2 節で先行研究である伊藤らの研究について紹介, 記法等を導入する．3 節では，一般化ジャンケンを 2 人ゼロ和ゲームとして定式化し，3 手, 5 手, 6 手のジャンケンで取るべき最適混合戦略を求める．4 節で，単純なジャンケンを元に合成したジャンケンでの最適戦略について考察する．5 節では，戦略的に無駄な手を持たないジャンケンは必ず奇数手からなること, またその戦略の一意性などを示す．最後に 6 節で本論文のまとめを行う.

2 準備

本節では，先行研究である伊藤らの研究 [2] に基づき，グラフ理論の基本的な知識を仮定した上で, ジャンケンに関する定義，定理を紹介する.

2.1 ジャンケンとトーナメント

n 手からなるジャンケンをグラフにより表現することを考える．各手を頂点, 勝敗関係を有向辺を用いて表すと, ジャンケンは**トーナメントグラフ**, すなわち n-完全グラフの各辺を適当に有向辺に置き換えたものとして表すことができる（図 1）．頂点数 n のトーナメントグラフのことを特に n-トーナメントグラフと呼ぶ．各ジャンケンに対し，それに対応するトーナメントグラフが存在することになり，逆に任意のトーナメントグラフに対して，それに対応するジャンケンを考えることができる．

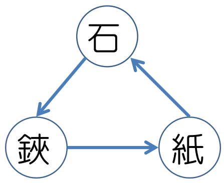

図 1　3 手のジャンケンのトーナメントグラフ表現

2.2 無駄な手

定義 1. ([2]) トーナメントグラフ $G = (V, E)$ において，ある 2 頂点 $u, v \in V$ が存在し, $(u, v) \in E$ であり，かつ，任意の $w \in V \setminus \{u, v\}$ に対して，$(v, w) \in E$ ならば $(u, w) \in E$ であるとき，u は v に**優越する**といい，v は**無駄な手**であるという．また無駄な手の存在しないトーナメントグラフとこれに対応するジャンケンを**効率的**であるという．

ある手 v に優越している手 u は手 v に勝ち，その v が勝てるすべての手にも勝つ．つまり，優越している手 u は，手 v の完全な上位互換となっており，わざわざ下位互換となっている手 v を使うのは無意味となる．これが v を無駄な手と呼ぶ理由である．なおこの定義では手数 1 のジャンケン, すなわち $|V| = 1$, $E = \emptyset$ のトーナメントグラフも効率的となる．実際に 1 手しかないジャンケンを遊ぶことはありえない（「あいこ」が続くだけである）が, 整合性からここではこのようなトーナメントグラフ (ジャンケン) を**自明なジャンケン**と呼び, 定義通り効率的であると認めることにする．

トーナメントグラフが効率的であることはグラフの直径の性質により言い換えることができる．グラフの頂点対 $u, v \in V$ に対し，u から v への距離 $\mathrm{dist}(u, v)$ を u を始点，v を終点とする最短路長で定義し，グラフ G の直径を $\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v\in V} \mathrm{dist}(u, v)$ とする．このとき，以下の補題が成立する．

定理 1. ([2]) n 頂点からなるトーナメントグラフ $G = (V, E)$ において，以下の 3 条件は等価である．

1. G は効率的である．
2. G の直径が 2 以下である．
3. G の任意の有向辺 $(u, v) \in E$ に対して, それを含む長さ 3 の有向閉路が存在する．

2.3 効率的なトーナメントの存在性

以下の手続きにより，任意の効率的なジャンケンから，手数を 2 つ増やした新たな効率的なジャンケンを作ることが可能である（図 2)．

手続き 1. ([2]) ある n-トーナメントグラフ $G = (V, E)$ に対し，$(n + 2)$-トーナメントグラフ $G' = (V', E')$ を作成. ただし $V' = V \cup \{n + 1, n + 2\}, E' = E \cup \{(n + 1, n + 2)\} \cup \{(i, n + 1), (n + 2, i) \mid i \in V\}$ を満たす.

この手続きにより，任意のトーナメントグラフ G から手数を 2 つ増やしたトーナメントグラフ G' を作成できる．定理 1 から G が効率的であったとき，G' も効率的であることがすぐ確認できる．

2.4 効率的なジャンケン

手数 6 程度までなら定理 1 を考慮することで，しらみつぶしに効率的なジャンケンの形を求めることができる．手数 3 のときは，日本の通常のジャンケンの形が効率的であり，この 1 パターンしかない．定理 1 を考慮すると，手数 4 の効率的なジャンケンを作ることはできないことは容易に確かめられる．手数 5 の効率的なジャンケンは 2 パターン，手数 6 の効率的なジャンケンは 3 パターンある．これらから，手数 3, 6 のジャンケンを手続き 1 で拡張していくことにより, 5 以上の任意の手数において効率的なジャンケンが存在することがわかる．

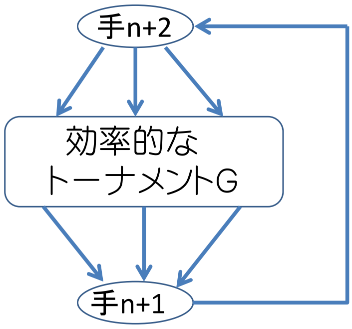

図 2　手続き 1

定理 2. ([2]) 自然数 n に対し、効率的な n-トーナメントグラフが存在する必要十分条件は $n \neq 2, 4$ である．

3　単純なジャンケンの最適戦略

3.1　2 人ゼロ和ゲームとしての定式化

一般化ジャンケンをプレイヤー 2 人（行プレイヤーと列プレイヤー）で遊ぶことを想定し, 2 人ゼロ和ゲームとして定式化する．各プレイヤーはジャンケンのルールに従い, 勝てば +1，負ければ −1 の利得を得るとし, 行プレイヤーから見た利得行列 $A = [a_{ij}]$ を用意する．行プレイヤーの取る混合戦略を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$，列プレイヤーの取る混合戦略を $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ とすると，行プレイヤーの期待利得を最大にすることを目的とした数理計画問題は, 以下のように定式化できる ($^\top$ は転置を表す)．また，これを満たす $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ がそれぞれ行プレイヤー，列プレイヤーの最適混合戦略である．

$$
\begin{aligned}
& \max_{x_i} \min_{y_j} \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_i x_i = 1, \\
& \sum_j y_j = 1, \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

この定式化は x_iy_j といった二次項を含むが，最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は, 以下の線形計画問題を解くことにより得られることが知られている [1].

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \max & z & \\
\text{subject to} & \sum_i & a_{ij}x_i - z \geq 0, & j=1,2,\dots,n, \\
& \sum_i & x_i = 1, & \\
& & x_i \geq 0, & i=1,2,\dots,n.
\end{array}
$$

以下では本定式化に基づき，一般化ジャンケンの最適戦略について考察する．まず本節にて自明でない最も単純な 3 手の最小のジャンケン，偶数手最小の効率的なジャンケンについて調べ，さらにその手数固有のジャンケンの最適戦略について考察する．その後，4 節ではジャンケンの拡張と最適戦略の関係について考察する．

3.2　手数 3 のジャンケンの最適戦略

まず，自明でない奇数手最小である手数 3 のジャンケンについて考察する．手数 3 のジャンケンは本質的には 1 種であり, その利得行列は以下の行列 A であらわされる:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

節点数 3 のトーナメントグラフを用いた 2 人ジャンケンについて，以下の定理が成り立つ.

定理 3. 節点数 3 のトーナメントグラフを用いた 2 人ジャンケンにおいて，戦略 $\boldsymbol{x} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$ が，唯一の最適戦略である.

証明. ジャンケンの 2 人ゼロ和ゲーム (P) は，自己双対問題（線形計画問題の双対問題が自身と本質的に同一であるような問題）であるから，(P) の最適値は必ず 0 となる [1]. よって，最適戦略を $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, x_3)^\top$ とおくと，制約式は，以下をみたす.

$$x_2 - x_3 \geq 0, \tag{1}$$
$$-x_1 + x_3 \geq 0, \tag{2}$$
$$x_1 - x_2 \geq 0, \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{4}$$

(1),(2),(3) より, $x_2 \geq x_3 \geq x_1 \geq x_2$ が成立, つまり，$x_1 = x_2 = x_3$ となる．よって，(4)

より，$x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$ となる．また，この戦略以外に制約をみたす戦略はありえないため，これが唯一の最適戦略となる． □

3.3　手数 5，6 のジャンケンの最適戦略

次に，手数 5 のジャンケン, 偶数手最小のジャンケンである手数 6 のジャンケンについて考える．後でみるように, 手数 5 のジャンケンの最適戦略は手数 6 のジャンケンでの戦略と強い関係がある．前述の通り，節点数 5 の効率的なトーナメントグラフは 2 パターン存在するため，それぞれをパターン 5-1，パターン 5-2 と呼ぶことにする（図 3，4）．パ

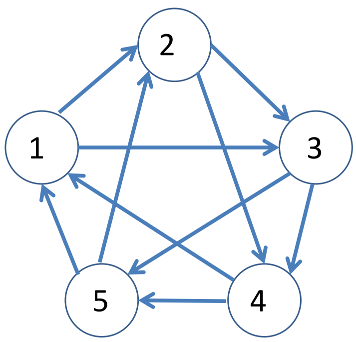

図 3　パターン 5-1 のトーナメントグラフ

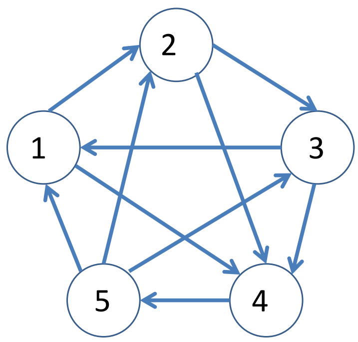

図 4　パターン 5-2 のトーナメントグラフ

ターン 5-1，パターン 5-2 における利得行列はそれぞれ以下の行列 $A_5^{(1)}$，行列 $A_5^{(2)}$ で表される：

$$A_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_5^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

節点数 5 のトーナメントグラフ 5-1, 5-2 を用いた 2 人ジャンケンについて，以下の定理が成り立つ.

定理 4. 節点数 5 のトーナメントグラフ, パターン 5-1, パターン 5-2 における唯一の最適戦略はそれぞれ $\boldsymbol{x}^{(1)} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)^\top$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = (1/9, 1/9, 1/9, 1/3, 1/3)^\top$ である.

証明. まずパターン 5-1 について考える. 先の証明と同様, (P) の最適値は 0 になる. よって最適戦略 $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top$ は以下の制約をみたす.

$$-x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq 0, \tag{5}$$
$$x_1 - x_3 - x_4 + x_5 \leq 0, \tag{6}$$
$$x_1 + x_2 - x_4 - x_5 \leq 0, \tag{7}$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \leq 0, \tag{8}$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 0, \tag{9}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \tag{10}$$

まず (6)+(8) より，$x_2 \leq x_4$ が成立する．一方, (5)+(7)+(9) より，$x_4 \leq x_2$ が成立するため $x_2 = x_4$ となる．これを (5) に代入すると $x_5 \leq x_3$ が成立する．(7)+(9) より，$x_3 \leq x_5$ が成立するため, $x_3 = x_5$ となる． これを (6) に代入して， $x_1 \leq x_4$ が成立する．一方, (5) + (8) より，$x_4 \leq x_1$ がするため, $x_1 = x_4$ となる．(9) にこれを代入すると，$x_3 \leq x_2$ が成立する．一方, (6) + (7) より，$x_2 \leq x_3$ が成立するため, $x_2 = x_3$ となる．以上より，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ となることがわかる．よって，(10) より，$\boldsymbol{x}^{(1)} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)^\top$ となる.

次にパターン 5-2 について考える． パターン 5-1 と同様に，制約式のみから最適戦略を求めることが可能である．計算は省略するが, 最適戦略 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ は $\boldsymbol{x}^{(2)} = (1/9, 1/9, 1/9, 1/3, 1/3)^\top$ となる. いずれも, これらは最適解が満たすべき制約式を満たす唯一の解であるため, 唯一の最適戦略を表す. □

なお, パターン 5-1 であらわされるジャンケンの唯一の最適戦略が $(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)^\top$ であることは, パターン 5-1 が 3.4 節で導入する平衡ジャンケンに該当するため, 定理 6 と定理 9 からも容易に確認できる． また，パターン 5-2 の唯一の最適戦略が $(1/9, 1/9, 1/9, 1/3, 1/3)^\top$ であることは, パターン 5-2 が, 手数 3 のジャンケンを手続 1 により合成したものとみなすことができるため, 後述の系 1 からも確認できる.

次に，手数 6 のジャンケンについて考える．前述の通り，節点数 6 の効率的なトーナメントは 3 パターン存在する．これらをパターン 6-1, 6-2, 6-3 と呼ぶ (図 5, 6, 7)．

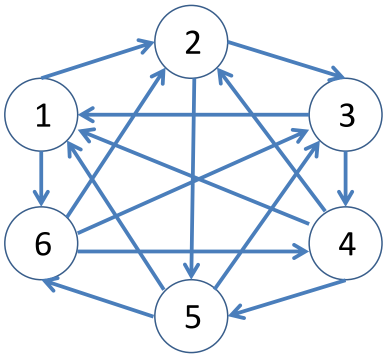

図 5　パターン 6-1

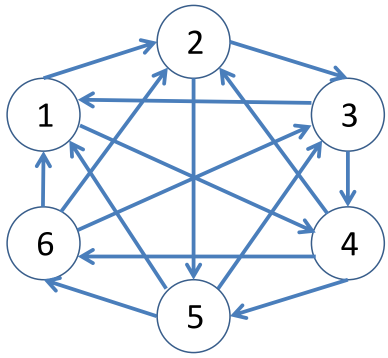

図 6　パターン 6-2

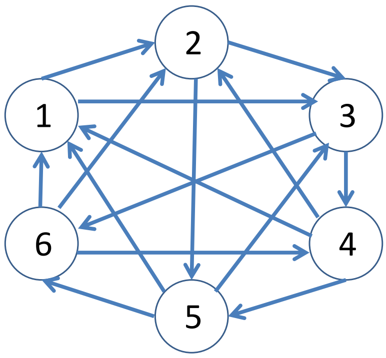

図 7　パターン 6-3

パターン 6-1, 6-2, 6-3 に対応する利得行列はそれぞれ以下の行列 $A_6^{(1)}$，行列 $A_6^{(2)}, A_6^{(3)}$ で表される：

$$A_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_6^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_6^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

節点数 6 のトーナメントグラフを用いた 2 人ジャンケンについて，以下の定理が成り立つ.

定理 5. 節点数 6 のトーナメントグラフ，パターン 6-1, 6-2, 6-3 において, $\boldsymbol{x}^{(1)} = (0,0,0,1/3,1/3,1/3)^\top$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = (0,1/9,1/3,1/3,1/9,1/9)^\top$, $\boldsymbol{x}^{(3)} = (0,1/5,1/5,1/5,1/5,1/5)^\top$ が，それぞれの唯一の最適戦略である.

証明. 定理 4 の証明と同様, $z = 0$ としたときの制約条件を満たす $\boldsymbol{x}$ がそれぞれ上述のベクトルのみであることを示すことができる．計算略. □

これらの最適戦略はいずれも出す確率を 0 とすべき手を含んでおり, 例えばパターン 6-1 は手 1, 2, 3 を選ぶ確率が 0 となっている．ここで行プレイヤー列プレイヤーが共に手 1, 2, 3 を確率 0 で出すということは, 利得行列 $A_6^{(1)}$ の第 4, 5, 6 行, 4, 5, 6 列のみを選んだ行列 $A_6^{(1)}[4,5,6;4,5,6]$ 上でジャンケンを行っていることに相当するが，このときの利得行列は 3 手のジャンケンを表す A そのものとなっている． 同様に, パターン 6-2 は本質的にパターン 5-2, パターン 6-3 はパターン 5-1 と同じであることがわかる.

以上で，奇数手，偶数手最小のジャンケンで取るべき戦略がわかった．次に，奇数手のジャンケンのみに考えられる「平衡ジャンケン」の最適戦略について考察する.

3.4 平衡ジャンケン

一般に，各頂点の出次数, 入次数が等しい有向グラフを**平衡有向グラフ** (*balanced directed graph*) と呼ぶ．これに倣い, 各頂点の出次数, 入次数が等しいトーナメントグラフグラフを**平衡トーナメントグラフ** (balanced tournament graph), そのようなトーナメントグラフによりあらわされるジャンケンを**平衡ジャンケン**と呼ぶことにする．定義より, 平衡トーナメントグラフは常に奇数頂点からなる．平衡ジャンケンでは, そのトポロジーにかかわらず, 等確率で手を出す戦略が最適であることを示すことができる.

定理 6. ℓ を自然数とする． 節点数 $2\ell+1$ の平衡ジャンケンにおいて，戦略 $\boldsymbol{x} = (1/(2\ell+1), 1/(2\ell+1), \ldots, 1/(2\ell+1))^\top$ は，最適戦略である.

証明. 平衡ジャンケンでは, 各頂点 j において,

$$\sum_i a_{ij} = 0 \tag{11}$$

が成立する．問題 (P) の制約条件にて, $\boldsymbol{x} = (1/(2\ell+1), 1/(2\ell+1), \ldots, 1/(2\ell+1))^\top$ を代入すると, (11) より,

$$\sum_{i=1}^{2\ell+1} a_{ij}x_i = \frac{1}{2\ell+1}\sum_{i=1}^{2\ell+1} a_{ij} = 0 \geq z, j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{2\ell+1} x_i = \sum_{i=1}^{2\ell+1} \frac{1}{2\ell+1} = 1.$$

となり, 実行可能解かつ, 目的関数値が 0 となることがわかるが, 自己双対性よりこれは最適解である. □

4 ジャンケンの合成とその最適戦略

本節では, 2.3 節で紹介した手続き 1 を一般化した概念として, ジャンケンの合成について考えた後, 合成と最適戦略の関係について考察する．議論に進む前に, 以下を定義 (確認) しておく.

定義 2. 手 1 のみからなるジャンケン (手数 1 のジャンケン) における (最適) 戦略は, 確率 1 で手 1 を出すことである.

4.1 ジャンケンの合成

まずジャンケンの合成を定義する．この定義においては，便宜上, 1 点のみからなるグラフもトーナメントグラフと見なすことにする．

定義 3. n-トーナメントグラフ $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, E)$, n 個のトーナメントグラフの列 $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$（ただし, $H_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, \ldots, n$) に対し,

$$
\begin{aligned}
V' &= \bigcup_{i=1,\ldots,n} V_i, \\
E' &= \bigcup_{i=1,\ldots,n} E_i \cup \bigcup_{(i,j)\in E} \{(u, v) \mid u \in V_i, v \in V_j\},
\end{aligned}
$$

を考える．このとき, これらを頂点集合, 辺集合とするグラフ $G(H_1, \ldots, H_n) = (V', E')$ を $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ **の G 上での合成**と定義する．

この定義について補足する．$G(H_1, \ldots, H_n)$ の頂点集合は, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ のすべての頂点を併せたものであり, 各 V_i の中での辺は H_i のまま張られている．その他の頂点間, 例えば V_i に属する頂点 u と V_j に属する頂点 v の間に張られる辺は, G の辺の向きに従う．すなわち, $(i, j) \in E$ ならば (u, v) である, $(j, i) \in E$ ならば (v, u) である．この定義より, 各頂点間には有向辺が張られるため, 得られる $G(H_1, \ldots, H_n)$ もトーナメントである．このとき定理 1 から次の定理が成立する．

定理 7. 効率的な n-トーナメントグラフ $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, E)$ と効率的な n 個のトーナメントグラフの列 $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ が与えられたとき, $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ を G 上で合成して得られる $G(H_1, \ldots, H_n)$ も効率的なトーナメントである．

ここで改めて手続き 1 について考える．3 手からなる効率的なトーナメント $G_3 = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\})$ と, 与えられた n-トーナメント $G = (V, E)$ を H_1, 1 頂点のみからなる $H_2 = (\{n + 1\}, \emptyset)$, $H_3 = (\{n + 2\}, \emptyset)$ とし, (H_1, H_2, H_3) を G_3 上で合成して得られるトーナメント $G_3(H_1, H_2, H_3)$ は手続き 1 によって得られる G' そのものである．すなわち, 合成を手続き 1 の一般化とみなすことができる．

4.2 最適戦略の合成

前節で定義したトーナメントの合成とその上でのジャンケンの最適戦略の関係について, 以下を示すことができる: $G(H_1,\dots,H_n)$ における最適戦略は, G と各 H_i における最適戦略から「合成」することができる．以下これを示すが，その前にまず記法を導入する．ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$ に対して $\boldsymbol{y}=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n,y_{n+1},y_{n+2},\cdots)^\top$ であるとき，これを簡潔に $\boldsymbol{y}=(c\boldsymbol{x},y_{n+1},y_{n+2},\cdots)^\top$ などと表すことにする.

定理 8. n-トーナメントグラフ $G=(\{1,2,\dots,n\},E)$ におけるジャンケンのある最適戦略 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)^\top$ と，トーナメントグラフ $H_i=(V_i,E_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ 上の最適戦略 $\boldsymbol{y}^{(i)*}$ $(i=1,2,\dots,n)$ が与えられたとする．このとき, $(x_1^*\boldsymbol{y}^{(1)*},x_2^*\boldsymbol{y}^{(2)*},\dots,x_n^*\boldsymbol{y}^{(n)*})^\top$ は $G(H_1,\dots,H_n)$ におけるジャンケンの最適戦略である.

証明. G の利得行列を $A=[a_{ij}]$, H_i の利得行列を $B=[b_{uv}^{(i)}]$, $G(H_1,\dots,H_n)$ の利得行列を $C=[c_{uv}]$ とする．頂点 u が元々 H_i の頂点であった (すなわち, $u\in V_i$) とすると,

$$c_{uv}=\begin{cases} b_{uv}^{(i)} & v\in V_i,\\ 0 & v=u,\\ a_{ij} & v\in V_j(j\neq i)\end{cases}$$

である．このとき, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_u)=(x_1^*\boldsymbol{y}^{(1)*},x_2^*\boldsymbol{y}^{(2)*},\dots,x_n^*\boldsymbol{y}^{(n)*})^\top$ が問題 (P) において $z=0$ としたときの実行可能解となっていれば, 自己双対性より最適解であると言える. 以下これを示すが, 簡単のため $\boldsymbol{y}^{(i)*}$ の u に対応する頂点の成分を単に y_u^* と書くことにする．まず $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^{(1)*},\dots,\boldsymbol{y}^{(n)*}$ のそれぞれの実行可能性から,

$$\begin{aligned}\sum_u\alpha_u&=\sum_{i=1}^n\sum_{u\in V_i}\alpha_u=\sum_{j=1}^n\sum_{u\in V_i}x_i^*y_u^*\\&=\sum_{i=1}^n x_i^*\sum_{u\in V_i}y_u^*=\sum_{i=1}^n x_i^*=1.\end{aligned}$$

また (α_u) を (P) の v 行左辺に代入すると ($v \in V_k$ とする),

$$
\begin{aligned}
\sum_u c_{uv} x_u &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{u \in V_i} c_{uv} \alpha_u \\
&= \sum_{i \neq k} \sum_{u \in V_i} c_{uv} \alpha_u + \sum_{u \in V_k} c_{uv} \alpha_u \\
&= \sum_{i \neq k} a_{ik} \sum_{u \in V_i} \alpha_u + \sum_{u \in V_k} b_{uv}^{(k)} \alpha_u \\
&= \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i^* \sum_{u \in V_i} y_u^* + x_j^* \sum_{u \in V_k} b_{uv}^{(k)} y_u^* \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となる. $\boldsymbol{y}^{(i)*}$ の H_i における実行可能性から, 各 i において, $\sum_{u \in V_i} y_u^* = 1$ が, $\boldsymbol{y}^{(k)*}$ の H_k における最適性から $\sum_{u \in V_k} b_{uv}^{(k)} y_u^* \geq 0$ が, $\boldsymbol{x}^*$ の G における最適性から $\sum_i a_{ik} x_i^* = \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i^* \geq 0$ がそれぞれ成立するため, (12) は

$$
\sum_u c_{uv} x_u \geq \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i^* \geq 0
$$

となるため, (P) の u 辺に対応する制約条件も $z = 0$ の下で満たすこととなる. 以上から (α_v) が最適解となることが示された. □

定理 3 とこの定理から, 手続き 1 に関する最適戦略を以下のように導出することができる.

系 1. トーナメントグラフ G で定義されるジャンケンの最適戦略が $\boldsymbol{x}^*$ であるとき, G に手続き 1 を適用して得られる G' で定義されるジャンケンにおいて,

$$
\left(\frac{1}{3} \boldsymbol{x}^*, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^{\top}
$$

は最適戦略である.

なお, 伊藤らは手続き 1 を続けることにより作成されたジャンケンが興奮度という尺度の最大となるジャンケンであることを示している [2]. この系は, 興奮度最大のジャンケンの最適戦略を, 1 敗しかしない手と 1 勝しかできない手を選ぶ確率をそれぞれ 1/3 にする形で再帰的に導くことができることを示している.

この節の最後に, 合成とその最適戦略の例を一つ挙げておく. 手数 5 のジャンケン (パターン 5-1) における手 5 を, 手数 3 のジャンケンに置き換える形で合成する (図 8). 定

理 4, 定理 3 より, パターン 5-1 の最適戦略は, $\boldsymbol{x} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)^\top$, 手数 3 のジャンケンの最適戦略は, $\boldsymbol{y} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$ であるため, この 7 手のジャンケンの最適戦略は, $(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/15, 1/15, 1/15)^\top$ となる.

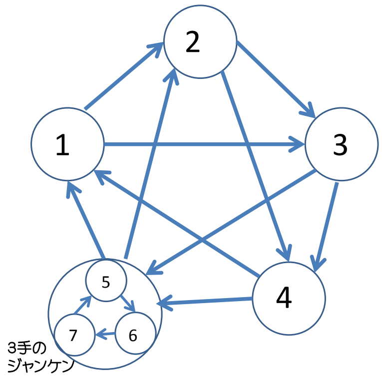

図 8　合成による 7 手のジャンケン

5　戦略的に無駄な手

3 節, 4 節と特定の形をした一般化ジャンケンにおける最適戦略, またジャンケンの合成と最適戦略の関係について考察を行った. ここで手数 6 のジャンケンの最適戦略に注目する. 手数 6 の効率的なジャンケンは 3 パターンあるが, 定理 5 で見たように, いずれのパターンにも最適戦略において, 出す確率を 0 とすべき手, すなわち「出すべきではない手」が存在している. しかし, この手は他の手の直接的な下位互換となっているわけではない. つまり, 伊藤らの定義に基づけば意味のある手であっても, 戦略的な観点からは無意味となる手が存在しうることを意味している. 以上を踏まえ, 次のように定義する.

定義 4. 一般化ジャンケンが与えられたとき, ある最適戦略において確率 0 となる手を**戦略的に無駄な手**と呼ぶ. またすべての最適戦略において確率 0 となる手を**全戦略的に無駄な手**と呼ぶ. 戦略的に無駄な手が存在しないトーナメントグラフを**狭義戦略効率的なトーナメントグラフ**, これに対応するジャンケンを**狭義戦略効率的なジャンケン**, 全戦略的に無駄な手が存在しないトーナメントグラフを単に**戦略効率的なトーナメントグラフ**, これに対応するジャンケンを**戦略効率的なジャンケン**と呼ぶ.

ここで「戦略的に無駄な手」は「無駄な手」の一般化に, 「狭義戦略効率的なトーナメ

ントグラフ」は「効率的なジャンケン」の一般化になっている．実際, 手 i が手 j に優越するようなジャンケンを考えたとき, ある最適戦略において手 j を選ぶ確率が $x_j^* > 0$ であるようなベクトル $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^\top$ があったとすると, $\boldsymbol{x}^*$ の第 i 成分に第 j 成分を足し, 第 j 成分を 0 としたベクトル $\boldsymbol{x}' = (x_1^*, \ldots, (x_i^* + x_j^*), \ldots, 0, \ldots, x_n^*)^\top$ も最適戦略であり, 定義より手 j は戦略的に無駄な手となっている (後述するが，これらは共に「全戦略的に無駄な手」「戦略効率的なトーナメントグラフ」に置き換えることができる).

さて, 定理 3 より節点数 3 のトーナメントグラフは狭義戦略効率的であることから, これに手続 1 を繰り返し適用することにより得られるトーナメントは，すべて戦略効率的である (系 1)．つまり, 任意の奇数 $n \geq 3$ に対して, 手数 n の戦略効率的なジャンケンが存在する．また後述の議論より, これらは狭義戦略効率的である.

では偶数手の戦略効率的なジャンケンは存在するのだろうか．ここまで見てきたように, 手数 4 の (戦略) 効率的なジャンケンは存在しない．また定理 5 より, 手数 6 の戦略効率的なジャンケンは存在しない．実は, 次の定理よりどのような偶数 n に対しても, 手数 n の戦略効率的なジャンケンは存在しない.

定理 9. あるジャンケンが戦略効率的であるなら，そのジャンケンは奇数手からなる．またその最適戦略は一意である.

以下，これを証明するための準備を行う．まず次の補題を示す.

補題 1. ジャンケンが戦略効率的であることの必要十分条件は, すべての手に対してその手を出す確率を正とする最適戦略が存在することである.

証明. この条件は 3.1 節の (P) において $x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ となる最適解が存在することを意味する．(←) 定義より明らか．(→) 戦略効率的ならば，各 i に対して, $x_i > 0$ を満たす最適解が存在する．これを $\boldsymbol{x}^{(i)}$ とおくと, $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}^{(i)}/n$ によって定義される x_i は (P) の最適解かつ, $x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ を満たす. □

さて, (P) を詳しく見るため, $z = x_{n+1}$ とし, 以下を定義する.

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} & -1 \\ A^\top & \vdots \\ & -1 \\ \hline 1 \cdots 1 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

これらを用いると, (P) の目的関数は $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}$ と表され, また制約条件を満たす $\boldsymbol{x}$ は $A'\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ を満たす．また双対問題 (D) の変数を $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ とすると, 目的関数は $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$, 制約条件を満たす $\boldsymbol{y}$ は $A'^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}$ を満たす．これらを元に相補スラック条件を考える．最適解の組 $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ に対して, $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$ が成立することから,

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^* \geq (A'^\top \boldsymbol{y}^*)^\top \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}^{*\top} \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{y}^{*\top}(A'\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{y}^{*\top}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^{*\top}(A'\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) \geq 0 \end{aligned}$$

すなわち, $j = 1, \ldots, n$ に対して, $y_j^* > 0$ ならば, $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i - x_{n+1} = 0$ が成立する．また (P) の $n+1$ 番目の制約は等式制約である．(P) が自己双対であることを考慮すると, 以下が成立する:

補題 2. (P) の最適解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})^\top$ で, $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすものが存在するならば, 連立方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持つ．また $\boldsymbol{x}^*$ はその解の一つである．

以上で，定理 9 の証明の準備が整った．以下，背理法により証明を行う．

証明. (定理 9) 偶数 n 手の戦略的に効率的なジャンケンが存在したとする． 補題 1, 2 より, $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持つ． ジャンケンの定義より, 利得行列 A は歪対称行列, すなわち $A^\top = -A$ であるから, A' は $(n+1) \times (n+1)$ の歪対称行列である．一般に $n \times n$ の歪対称行列 B は, n が奇数のとき, 非正則であることが知られている．これは $\det(B) = \det(B^\top) = \det(-B) = (-1)^n \det(B)$ から容易に確かめることができる．このことから, A' は非正則, すなわち, $\mathrm{rank}(A') \leq n$ である (rank は行列の階数を表す)．このことは, A' を簡約化したときの主成分数が n 以下であることを意味する．一方, トーナメントを表す行列の階数は n が奇数のときは $n-1$, n が偶数のときは n であることが知られている [3]. つまり, A を簡約化すると単位行列になる．以上から，A' の簡約化は (1) まず A を単位行列に簡約化するのと同じ行基本変形をに施し, (2) 第 1 行から n 行までを順に第 $(n+1)$ 行から引くことにより完成し, 第 $(n+1)$ 行の要素はすべて 0 となる．すなわち, $[A'|\boldsymbol{b}]$ の簡約化は A' を簡約化する行基本変形 (上述) を施すことにより得られ, $\boldsymbol{b}$ の $(n+1)$ 要素の 1 はそのまま残ることになる．

以上は, A' の階数が n であるのに対し, $[A'|\boldsymbol{b}]$ の階数が $n+1$ であることを意味する．これは $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持つことに反する．これより, 偶数 n 手の戦略的に効率的なジャンケンが存在しないことがわかる．

次に, 戦略的に効率的なジャンケンが存在した場合, その最適戦略は一意であることを示す．上述の議論より, 戦略的に効率的なジャンケンが存在した場合, それは奇数手 n か

らなる．補題 1, 2 から $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持つ．さて, A' は $n+1$ 点からなるトーナメントを表す行列とみなすことができる．上と同様 ($n+1$ が偶数であることから), [3] から A' の階数は $n+1$，すなわち正則である．よって A' には逆行列 A'^{-1} が存在するため, 最適解は $A'^{-1}\boldsymbol{b}$ と一意に定まる． □

定理 9 と補題 1 から, 任意の戦略効率的なジャンケンではすべての手に対してその手を出す確率を正とする最適戦略が存在し, それが唯一の最適戦略であることがわかる．このためいずれの手も戦略的に無駄な手ではないことから, これは狭義戦略効率的であることがわかる．つまり, 先述のように「戦略的に無駄な手」「全戦略的に無駄な手」は「無駄な手」の一般化になっているし, 「狭義戦略効率的なトーナメント (ジャンケン)」「戦略効率的なトーナメント (ジャンケン)」は「効率的なトーナメント (ジャンケン)」になっている．また前節で示した定理からいくつかの系が導かれる．以下，これらをまとめておく．

定理 10. トーナメント G が定義するジャンケンにおいて, 以下の 4 条件は等価である．

1. G において, すべての手に対してその手を出す確率を正とする最適戦略が存在する．
2. G における最適戦略が一意であり, その最適戦略において各手を出す確率は正である．
3. G は戦略効率的である．
4. G は狭義戦略効率的である．

系 2. 戦略効率的なトーナメントグラフは効率的である．

系 3. 節点数 $2\ell+1$ の平衡ジャンケンにおける唯一の最適戦略は $\boldsymbol{x} = (1/(2\ell+1), 1/(2\ell+1), \ldots, 1/(2\ell+1))^\top$ である．

系 4. 任意の平衡トーナメントグラフ (ジャンケン) は効率的である．

系 5. 戦略効率的な n-トーナメントグラフ $G = (\{1,2,\ldots,n\}, E)$ におけるジャンケンの最適戦略 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ と，戦略効率的なトーナメントグラフ $H_i = (V_i, E_i) (i = 1,2,\ldots,n)$ 上の最適戦略 $\boldsymbol{y}^{(i)*} (i = 1,2,\ldots,n)$ が与えられたとする． このとき $G(H_1, \ldots, H_n)$ は戦略効率的であり，その唯一の最適戦略は $(x_1^*\boldsymbol{y}^{(1)*}, x_2^*\boldsymbol{y}^{(2)*}, \ldots, x_n^*\boldsymbol{y}^{(n)*})^\top$ である．

6　まとめと今後の課題

本論文では, 伊藤らにより定義された無駄な手のない n 手ジャンケン — 効率的なジャンケン — に対して最適戦略の観点から考察を行った．興味深いことに, 効率的なジャンケンであっても戦略的には出すべきでない手が存在する場合がある．本論文ではこのような観点から「無駄な手」を最適戦略の観点から一般化した「戦略的に無駄な手」を定義しその性質を調べた．伊藤らが効率的なジャンケンに対する有向グラフとしての特徴づけを行い, 構成的な証明により自然数 $n \neq 2, 4$ に対して, 手数 n の効率的なジャンケンの存在性を示したのに対し, 本論文では偶数手の戦略効率的なジャンケンは存在しないことを数理計画的に, 任意の奇数 n に対して, n 手の戦略効率的なジャンケンが存在することを構成的に示した．

定理 9 から, 偶数 n に対しては, n-トーナメントグラフは効率的であっても戦略効率的ではないことがわかる．一方, 奇数 n に関しては, 例えば $n = 3, 5$ の効率的なトーナメントグラフは 3 節で見たようにいずれも戦略効率的である．また, 4 節の最後で見た $n = 7$ の効率的なトーナメントグラフも戦略効率的である．さらに奇数手数の平衡トーナメントも系 3 より戦略効率的であるし, 系 1 より, 戦略効率的なトーナメントグラフに手続 1 を繰り返し適用して得られるトーナメントグラフは戦略効率的である．このように眺めると,「奇数 n の効率的なトーナメントグラフはいずれも戦略効率的なのではないか？」と思われてくるが, 実際のところどうなのだろうか.

残念ながらこの「予想」は成立しない． 例えば, 3.3 節でとりあげた 6 頂点のパターン 6-1 トーナメントグラフ $G_6^{(1)}$, 1 頂点のみからなる H_1 を合成した $G_6(G_6^{(1)}, H_1, H_1, H_1, H_1, H_1)$ を考える．これは 11 頂点からなる効率的なトーナメントグラフであり, 定理 8 から $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3)^\top$ はその最適戦略である．よって定理 10 より, この 11 点のトーナメントグラフが与えるジャンケンは, 効率的であるが戦略効率的ではない奇数頂点数のトーナメントグラフの例となっていることがわかる.

この例からもわかるように, 合成によって得られるジャンケンが戦略効率的か否かは合成元となるジャンケンの性質に左右される．となると, 今度は次のような疑問が浮かぶ：合成によって得られないような奇数手のジャンケン (**固有型**と呼ぶ) で戦略効率的でないものが存在するのだろうか. 固有型のトーナメントグラフは効率的なトーナメントグラフの合成において, 合成数における素数のような役割を果たすものであるが, 例えばその典型例として以下に定義する「すくみ型」がある.

定義 5. 次の $(2\ell+1)$-トーナメントグラフ $G=(V,E)$ を以下のように定義する：頂点 $V=\{1,2,\cdots,2n+1\}$ とし，$f(x)\equiv x \mod 2\ell+1$ (ただし $1\leq f(x)\leq 2\ell+1$) としたとき，$E_i=\{(i,f(i+1)),(i,f(i+2)),\cdots,(i,f(i+\ell)),(f(i+\ell+1),i),(f(i+\ell+2),i),\ldots,(f(i+2\ell),i)\}, E=\bigcup_{i=1}^{2\ell+1}E_i$ とする．このトーナメントグラフと，これに同型のものを**すくみ型**と呼ぶ.

このすくみ型が固有型であることは以下のように背理法により確かめられる：固有型でないとすると, 3 点以上からなる集合 S が存在し, S で誘導される部分グラフも効率的となっている．この S に対し, $\forall u\in S:(i,u)\in E$, $\forall u\in S:(u,j)\in E$, となるような点 $i,j\notin S$ が存在する．このことは, $S\subseteq\{f(i+1),\ldots,f(i+\ell+1)\}$, $S\subseteq\{f(j+\ell+2),\ldots,f(j+2\ell)\}$ を意味する．しかし, このことは S で誘導される部分グラフが非巡回となることを意味し, 効率的となることに反する．以上から, すくみ型は固有型である．しかし, すくみ型は同時に平衡トーナメントグラフでもあるため, 定理 6 から戦略効率的であり, 上述の疑問に答えるものではない.

以上の議論から, 例えば, 奇数頂点数の固有型トーナメントグラフで戦略効率的でないものが存在するかどうか, など色々な興味深い未解決の問題が残っていることがわかる.

謝辞

定理 9 の証明に関するコメントを下さった, 慶応義塾大学の田村明久先生, 電気通信大学の岡本吉央先生に感謝いたします．本研究は JSPS 科研費 24220003, 26540005 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] Vasek Chvatal: *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, 1983.

[2] 伊藤 大雄, 永持 仁: “ジャンケンのトーナメント表現と意味ある拡張”, 数理解析研究所講究録, 906, pp.14-23, 1995.

[3] Clifford A. McCarthy and Arthur T. Benjamin:“Determinants of the Tournaments”, *Mathematics Magazine*, pp. 133–135. 1996.

[4] `http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-feuille-ciseaux` (Retrieved 2015-04-01)

[5] `http://www.umop.com/rps.htm` (Retrieved 2015-04-01)